

Varianta 80

SUBIECTUL I

- a) $AB = \sqrt{10}$.
- b) $S_{ABC} = \frac{11}{2}$.
- c) $\cos x = 0$.
- d) $h = \sqrt{3}$.
- e) $a = 3, b = -11$
- f) $BC = 5$.

SUBIECTUL II

1.

- a) Există două funcții cu proprietatea dată.

b) $p = \frac{1}{5}$.

c) $x = 0$.

d) $1 + 4 + 7 + \dots + 31 = 176$

e) $(g \circ f)(-1) = 4$

2.

a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.

c) $x = 0$ este asimptotă verticală.

d) $\int_1^2 f(x) dx = \frac{3}{2} + \ln 2$.

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = 1$.

SUBIECTUL III

a) $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1$.

b) $\det(A) = 3$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

d) $A^2 - 4A + 3I_2 = O_2$.

e) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A \cdot B) = -3, \det(B) = -1 \Rightarrow \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$

f) Fie $P(n): A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}.$

$$P(1): A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} (A).$$

Presupunem $P(k) (A)$ și demonstrăm $P(k+1) (A)$, unde $k \geq 1$.

$$P(k): A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^k + 1 & 3^k - 1 \\ 3^k - 1 & 3^k + 1 \end{pmatrix} \text{ iar } P(k+1): A^{k+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{k+1} + 1 & 3^{k+1} - 1 \\ 3^{k+1} - 1 & 3^{k+1} + 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^k + 1 & 3^k - 1 \\ 3^k - 1 & 3^k + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{k+1} + 1 & 3^{k+1} - 1 \\ 3^{k+1} - 1 & 3^{k+1} + 1 \end{pmatrix}.$$

De unde $P(n)$ este $(A) \forall n \in \mathbb{N}^*$.

g) $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2007} =$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3+1 & 3-1 \\ 3-1 & 3+1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^2+1 & 3^2-1 \\ 3^2-1 & 3^2+1 \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{2007}+1 & 3^{2007}-1 \\ 3^{2007}-1 & 3^{2007}+1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} S+2007 & S-2007 \\ S-2007 & S+2007 \end{pmatrix} \text{ unde } S = 3 + 3^2 + \dots + 3^{2007} = \frac{3}{2} (3^{2007} - 1).$$

SUBIECTUL IV

a) Calculăm $x^4 - 1 + \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{x^8 - 1 + 1}{x^4 + 1} = \frac{x^8}{x^4 + 1} = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $f'(x) = 4x^3 - \frac{4x^3}{(x^4 + 1)^2} = \frac{4x^3(x^8 + 2x^4)}{(x^4 + 1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x^4) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{x^4 + 1} \right) = -1.$

d) $f'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0].$

e) $\int_{-1}^1 (x^4 + 1) f(x) dx = \int_{-1}^1 x^8 dx = \frac{2}{9}.$

f) Fie $P(n): 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

$$P(1): 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ adevărat.}$$

Presupunem $P(k) (A)$ și demonstrăm $P(k+1) (A)$, unde $k \geq 1$.

$$P(k): 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \text{ iar}$$

$$P(k+1): 1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

De unde $P(n)$ este (A), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

g) Deoarece: $\frac{(k^4 + 1)f(k)}{k^5} = k^3$ unde $k \geq 1$ atunci limita cerută

$$\text{devine: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4} \stackrel{f)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}.$$